УДК 517.968.2; 519.62/.64

И. В. Бойков, Е. В. Кучумов

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Аннотация. Предложены и обоснованы итерационные методы решения интегральных уравнений Вольтерра в свертках первого и второго родов. Основное внимание уделяется уравнениям первого рода: $\int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t)$, $\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1,t_2)$.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра, итерационные методы.

Abstract. Offered iteration methods for solution of Volterra integral equatios of first and second kinds. Considered Volterra equations with convolution. Base attention is given for integral equations of the first kind $\int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t)$, $\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1,t_2)$.

Keywords: Volterre integral equations, interation methods.

Введение

Интегральные уравнения Вольтерра исторически являются одним из первых видов интегральных уравнений, ставших известными математикам. Несмотря на более чем столетнюю историю, теория интегральных уравнений Вольтерра продолжает активно развиваться. Это связано с несколькими обстоятельствами. Во-первых, постоянно возникают все новые области физики, экономики, экологии, в которых основные процессы моделируются интегральными уравнениями Вольтерра. Это приводит к возникновению новых классов интегральных уравнений типа Вольтерра. Во-вторых, продолжается исследование с различных позиций классических уравнений Вольтерра.

Представить подробный обзор современных публикаций, посвященных интегральным уравнениям Вольтерра, в короткой заметке не представляется возможным, т.к. по этой тематике ежегодно публикуется несколько сотен статей. Отметим только, что подробное изложение классических результатов, относящихся к уравнениям Вольтерра, и обширная библиография приведены в работах [1–9].

В данной работе предлагается и обосновывается новый итерационный метод решения интегральных уравнений Вольтерра первого и второго родов.

1 Одномерные интегральные уравнения Вольтерра

Рассмотрим интегральные уравнения

$$\int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t); \tag{1}$$

$$x(t)+\int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{2}$$

которые часто встречаются в физике.

Стандартные методы операционного исчисления заключаются в том, что к уравнениям (1) и (2) применяется преобразование Лапласа, которое приводит эти уравнения к алгебраическим уравнениям

$$H(p)X(p)=F(p); \tag{3}$$

$$X(p)+H(p)X(p)=F(p), \tag{4}$$

где $X(p), H(p), F(p)$ – преобразования Лапласа функций $x(t), h(t), f(t)$.

Оператор Лапласа будем обозначать буквой $L: L(h)=H(p)$.

Решения уравнений (3), (4) имеют вид

$$X(p)=F(p)/H(p); \tag{5}$$

$$X(p)=F(p)/(1+H(p)). \tag{6}$$

Применяя к выражениям (5), (6) обратное преобразование Лапласа, формально можно получить решения соответствующих уравнений. Однако из-за возможности обращения функций $H(p)$ или $(1+H(p))$ в нуль, расходимости интегралов обратного преобразования Лапласа получение достаточно точных и устойчивых решений во многих случаях весьма проблематично. Поэтому представляет интерес развитие других приближенных методов решения интегральных уравнений видов (1) и (2). В первую очередь представляет интерес построение итерационных методов из-за их устойчивости и фильтрующих свойств по отношению к возмущениям.

Прежде чем перейти к построению итерационных алгоритмов, оценим нормы прямого и обратного преобразования Лапласа. Обозначим через c вещественное число, определяющее полуплоскость сходимости функции $F(p)$. Ниже через c будем обозначать число, определяющее полуплоскости сходимости всех используемых функций, и будем рассматривать функции $F(p), H(p), X(p)$ при $p=u+iv, u=\text{const}>c, -\infty<v<\infty$.

Норму функции $F(p)$ определим формулой

$$\| F(p)\| = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |F(u+iv)|^2 \, dv\right]^{1/2}. \tag{7}$$

Выведем формулу, аналогичную формуле Парсеваля для преобразования Фурье. Очевидно,

$$\| F(p)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(u+iv)|^2 \, dv = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_0^{\infty} e^{-ut-ivt} f(t)dt\right|^2 dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_0^{\infty} e^{-ivt}(e^{-ut} f(t))dt\right|^2 dv = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivt}(e^{-ut} f(t))_+ dt\right|^2 dv =$$

$$= 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| V\left((e^{-ut} f(t))_+ \right) \right|^2 dv = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| (e^{-ut} f(t))_+ \right|^2 dt =$$

$$= 2\pi \int\limits_{0}^{\infty} \left| e^{-ut} f(t) \right|^2 dt = 2\pi \| f_u^+(t) \|^2 . \quad (8)$$

Здесь

$$f_u^+(t) = (e^{-ut} f(t))_+ = \begin{cases} e^{-ut} f(t), t \ge 0, \\ 0, t < 0, \end{cases}$$

$V(f)$ – преобразование Фурье функции $f(t)$, определяемое формулой

$$V(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt;$$

$$\| e^{-ut} f(t) \| = \left[\int\limits_{0}^{\infty} | e^{-ut} f(t) |^2 \, dt \right]^{1/2} . \quad (9)$$

Рассмотрим уравнение (1). Применив к нему преобразование Лапласа, приходим к уравнению (3). Пусть действительное число c определяет полуплоскость сходимости. Положим, $p = u + iv, u = \text{const} > c.$ Предположим, что при изменении v в пределах $-\infty < v < \infty$ значения функции $H(p)$ лежат внутри угла раствора, меньшего π. Тогда существует такое комплексное число γ, при котором значения функции $\gamma H_u^+(v)$ при изменении v в пределах от $-\infty$ до ∞, лежат внутри окружности радиуса 1 с центром в точке (1,0) плоскости комплексной переменной и, возможно, в точке (0,0). Здесь $H_u^+(v)$ – преобразование Лапласа функции $(e^{-ut} h(t))_+$ при $p = u + iv$.

В случае, если значения функции $\gamma H_u^+(p), p = u + iv,$ лежат внутри единичной окружности с центром в точке (1,0) и радиусом 1 (по аналогии с [10] это условие назовем условием *A*), рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) - \gamma \left(\int\limits_0^t h(t-\tau) x_n(\tau) d\tau - f(t) \right), \quad n = 0,1,\ldots \quad (10)$$

Докажем сходимость этого итерационного процесса. Умножим уравнение (10) на e^{-ut}. В результате имеем

$$e^{-ut} x_{n+1}(t) = e^{-ut} x_n(t) - \gamma \left(\int\limits_0^t e^{-u(t-\tau)} h(t-\tau) e^{-\tau u} x_n(\tau) d\tau - e^{-ut} f(t) \right). \quad (11)$$

Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$e^{-ut}(x_{n+1}(t)-x_n(t))=e^{-ut}\left(x_n(t)-x_{n-1}(t)-\gamma\left(\int_0^t h(t-\tau)(x_n(\tau)-x_{n-1}(\tau))d\tau\right)\right).$$

Переходя к нормам, имеем

$$\| e^{-ut}(x_{n+1}(t)-x_n(t))\|=\| e^{-ut}\left(x_n(t)-x_{n-1}(t)-\right.$$

$$\left.-\gamma\left(\int_0^t h(t-\tau)(x_n(\tau)-x_{n-1}(\tau)d\tau)\right)\right\|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|L\left[(x_n(t)-x_{n-1}(t))-\gamma\left(\int_0^t h(t-\tau)(x_n(\tau)-x_{n-1}(\tau))d\tau\right)\right]\right\|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|(1-\gamma H(v))(X_n(v))-X_{n-1}(v)\right\|\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sup_{-\infty<v<\infty}|1-\gamma H(v)|\,\| X_n(v)-X_{n-1}(v)\|\le$$

$$\le\sup_{-\infty<v<\infty}|1-\gamma H(v)|\,\| e^{-ut}(x_n(t)-x_{n-1}(t))\|.$$

Здесь во временной области использована норма, определяемая формулой (9), а в спектральной области – норма, определяемая формулой (7).

Так как по предположению $\sup\limits_{-\infty<v<\infty}|1-\gamma H(v)|\le q<1,$ то, как следует из теоремы Банаха [11], итерационный процесс (10) сходится к решению $x(t)$ уравнения (1) как геометрическая прогрессия со знаменателем q.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1.1. Пусть значения функции $H_u^+(v)$ лежат внутри угла с вершиной в начале координат и с раствором, меньшим π, в плоскости комплексной переменной. Тогда найдется такая константа γ, что выполняется условие $\sup\limits_{-\infty<v<\infty}|1-\gamma H_u^+(v)|\le q<1$ и итерационный процесс (10) сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q к решению $x^*(t)$ уравнения (1).

В случае, если условие A не выполняется, но значения функции $H(v)$ лежат внутри угла раствора меньшего π с вершиной в начале координат плоскости комплексной переменной, и, возможно, в его вершине для решения уравнения (1) может быть использован следующий итерационный процесс:

$$x_{n+1}(t)=\alpha_n x_n(t)+(1-\alpha_n)(x_n(t)-\gamma\left(\int_0^t h(t-\tau)x_n(\tau)d\tau-f(t)\right)\Bigg),\quad n=0,1,\ldots,\qquad(12)$$

где $0 < \alpha_* \le \alpha_n \le \alpha^* < 1$, константа γ выбрана таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\sup\limits_{-\infty<v<\infty} |1-\gamma H(v)| \le 1.$

Из условия, наложенного на функцию $H(v)$, следует, что последнее неравенство выполнимо. Пусть уравнение (1) разрешимо. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.2. Пусть уравнение (1) разрешимо. Пусть значения функции $H_u^+(v), -\infty < v < 1,$ расположены внутри угла раствора меньшего π с вершиной в начале координат плоскости комплексной переменной и, возможно, в его вершине. Тогда итерационный процесс (12) сходится к решению уравнения (1).

Замечание. Если уравнение (1) имеет несколько решений, то процесс сходится к одному из решений. Доказательство основано на теореме сходимости итерационных процессов с унитарными операторами [12].

Рассмотрим теперь случай, когда условие A не выполняется. Зафиксируем u $(u > c)$ и построим множества $\Delta_k, k = 0,1,\ldots,N,$ где $\Delta_0 = (-\infty, v_0),$ $\Delta_k = [v_k, v_{k+1}], k = 1,2,\ldots,N-1,$ $\Delta_N = (v_N, \infty),$ конечные точки $v_j, j = 0,1,\ldots,N,$ которых подбираются таким образом, чтобы множество значений $H(u+iv)$ при $v \in \Delta_k, k = 0,1,\ldots,N,$ было расположено внутри угла с раствором меньшим π и с вершиной в начале координат плоскости комплексной переменной w. При выполнении этого условия для каждого k найдется такое комплексное число γ_k, что при $v \in \Delta_k, k = 0,1,\ldots,N,$ значения функции $H(u+iv)$ расположены внутри единичной окружности с центром в точке (1,0) плоскости комплексной переменной w и, возможно, в точке (0,0).

Вначале рассмотрим случай, когда функция $H(u+iv)$ не обращается в нуль при конечных значениях v, $-\infty < v < \infty.$

Тогда для решения уравнения (1) может быть использован следующий итерационный процесс:

$$x_{n+1}^k(t) = x_n^k(t) - \gamma_k \left(\int\limits_0^t h_k(t-\tau) x_n^k(\tau)d\tau - f_k(t) \right), \quad k = 1,\ldots,N-1, \quad n = 0,1,\ldots; \tag{13}$$

$$x_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^{N-1} x_{n+1}^k(t). \tag{14}$$

Здесь $h_k(t) = \int\limits_0^t h(t-\tau)e_k(\tau)d\tau$; $e_k(\tau)$ – обратное преобразование Лапласа функции $E_k(u+iv)$, определяемой формулой

$$E_k(u+iv) = \begin{cases} 1, & v \in \Delta_k, \\ 0, & v \in (-\infty,\infty) \setminus \Delta_k, \end{cases} \quad k = 0,1,\ldots,N.$$

При каждом фиксированном значении k, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, сходимость итерационной схемы (13) доказывается так же, как и сходимость итерационного процесса (2).

Можно показать, что итерационный процесс (13), (14) сходится к функции $x_N^*(t)$, которая является прообразом функции $X^*(p)E_{[v_0, v_N]}(p)$, где $X^*(p)$ – образ решения $x^*(t)$ уравнения (1), а $E_{[v_0, v_N]}(p)$ – характеристическая функция сегмента $[v_0, v_N]$:

$$E_{[v_0, v_N]}(u+iv) = \begin{cases} 1, \upsilon \in [\upsilon_0, \upsilon_N], \\ 0, \upsilon \in (-\infty, \infty) \setminus [\upsilon_0, \upsilon_N]. \end{cases}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1.3. Пусть выполнены следующие условия:

1) уравнение (1) имеет единственное решение $x^*(t)$;

2) функция $H(u+iv)$ не обращается в нуль при конечных значениях v, $-\infty < v < \infty$;

3) преобразование Лапласа решения $x^*(t)$ суммируемо с квадратом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X^*(u+iv)|^2 \, dv = k < \infty.$$

Тогда для любого ε найдутся такие узлы $v_k, k = 0, 1, \ldots, N$, и такие комплексные константы γ_k, $k = 0, 1, \ldots, N$, что итерационный процесс (13), (14) сходится к функции $x_N^*(t)$, и справедлива оценка

$$\left[\int_0^{\infty} |e^{-ut}(x^*(t) - x_N^*(t))|^2 \, dt \right] < \varepsilon .$$

В случае, если функция $H(u+iv)$ с фиксированным значением $u(u > c)$ при изменении v от $-\infty$ до ∞ может обращаться в нуль в конечном числе точек, то для решения уравнения (1) нужно использовать другую вычислительную схему.

Пусть функция $H(u+iv)$ при фиксированном значении $u(u > c)$ и при v изменяющемся в пределах от $-\infty$ до ∞, обращается в нуль в конечном числе точек. Тогда существует такой набор узлов $v_k, k = 0, 1, \ldots, N$, что при изменении параметра v на множествах $\Delta_0 = (-\infty, v_0], \Delta_k = [v_k, v_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots, N-1, \Delta_N = [v_N, \infty)$, значения функции $H(u+iv)$, $u = \text{const}, u > c$, находятся внутри угла с раствором меньшим π с вершиной в начале координат плоскости комплексной переменной w и, возможно, в его вершине. Тогда каждому множеству $\Delta_k, k = 0, 1, \ldots, N$, можно поставить в соответствие комплексное число $\gamma_k, k = 0, 1, \ldots, N$, такое, что значения функции $\gamma_k H(u+iv)$ при $u = \text{const}, u > c, v \in \Delta_k$, расположены внутри единичной окружности с центром в точке (1,0) и, возможно, в точке (0,0). Построим итерационный метод

$$x_{n+1}^k(t) = \alpha_n^k x_n^k(t) + (1-\alpha_n^k)\times$$

$$\times\left(x_n^k(t) - \gamma_k \left(\int\limits_0^t h_k(t-\tau)x_n(\tau)d\tau - f_k(t) \right)\right), \ k = 0,1,\dots,N, \ n = 0,1,\dots, \quad (15)$$

$$x_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{N} x_{n+1}^k(t). \quad (16)$$

Здесь $h_k(t), f_k(t)$ – прообразы функций $H(u+iv)\, E_k(u+iv)$, $F(u+iv)\, E_k(u+iv)$, где $E_k(u+iv)$ – характеристическая функция множества Δ_k, $k = 0,1,\dots,N$, определяемая формулой

$$E_k(u+iv) = \begin{cases} 1, \ \upsilon\in \Delta_k, \\ 0, \ \upsilon\in (-\infty,\infty) \setminus \Delta_k. \end{cases}$$

Относительно сходимости итерационной схемы (15), (16) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.4. Пусть уравнение (1) разрешимо. Тогда итерационный процесс (15), (16) сходится к одному из решений.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 1.2.

Изложенный выше итерационный метод решения интегральных уравнений Вольтерра в свертках может быть применен и к решению интегральных уравнений вида

$$x(t) + \int\limits_t^\infty h(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t);$$

$$\int\limits_t^\infty h(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t),$$

которые, как отмечается в [1], широко используются при анализе процессов в физических системах.

Здесь при обосновании вычислительных схем нужно применить специальную теорему о свертке [1]

$$L\left[\int\limits_t^\infty h(t-\tau)x(\tau)d\tau \right] = H(-p)X(p),$$

где $H(-p) = \int\limits_0^\infty h(-t)e^{pt}dt;$ $X(p)$ – стандартное изображение, $X(p) = \int\limits_0^\infty x(t)e^{-pt}dt.$

Замечание. Наряду с построением итерационных процессов в действительной области естественно рассмотреть аналогичные процессы в области изображений. Рассмотрим итерационный процесс:

$$X_{n+1}(p) = X_n(p) - \gamma(H(p)X_n(p) - F(p)), n = 0, 1, \ldots, \tag{17}$$

построенный по аналогии с итерациями (10). Его сходимость при $p = u + iv$, $-\infty < v < \infty$ следует из доказательства теоремы 1.1. Вычислив по формуле (17) значения $X(p)$ на сетке узлов $p_k = u + iv_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$, и используя квадратурные формулы вычисления обратного преобразования Лапласа

$$\frac{1}{2\pi}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty} e^{(u+iv)t} X(u+iv)dv = \begin{cases} x(t), t > 0, \\ 0, t < 0, \end{cases} \tag{18}$$

находим значения $x(t)$ в узлах сетки t_k, $k = 1, 2, \ldots, M$.

По этим значениям строится локальный сплайн, восстанавливающий функцию $x(t)$.

Вычисление интеграла, стоящего в левой части формулы (18) по квадратурным формулам, может оказаться неустойчивым.

Здесь следует использовать методы регуляризации, изложенные в книге [13].

Результаты, аналогичные приведенным в данном разделе, могут быть получены и для уравнений второго рода вида (2). Однако, т.к. для уравнений вида (2) метод простой итерации всегда сходится, то распространение предыдущих результатов на уравнения вида (2) не представляет значительного практического интереса, поэтому здесь не приводится.

2 Многомерные интегральные уравнения Вольтерра в свертках

В этом разделе будем исследовать итерационные методы решения многомерных интегральных уравнений Вольтерра в свертках. При этом ограничимся двумерными уравнениями первого рода вида

$$\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2)x(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1, t_2). \tag{19}$$

Обозначим через $H(p_1, p_2)$ преобразование Лапласа функции $h(t_1, t_2)$, осуществляемое формулой

$$H(p_1, p_2) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(p_1 t_1 + p_2 t_2)} h(t_1, t_2)dt_1 dt_2.$$

Аналогично определяются преобразования $X(p_1, p_2)$ и $F(p_1, p_2)$ функций $x(t_1, t_2)$ и $f(t_1, t_2)$.

Будем считать функции $H(p_1, p_2)$ и $F(p_1, p_2)$ аналитическими по переменным $p_i = u_i + iv_i$ при $u_i \ge c_i$, $i = 1, 2$. Зафиксируем значения $u_i \ge c_i$,

$i=1,2,$ и рассмотрим функцию $H^{+}_{u_1u_2}(v_1,v_2)=H(u_1+iv_1,u_2+iv_2)$ при $-\infty<v_i<\infty,\ i=1,2.$

Предположим вначале, что значения функции $H^{+}_{u_1u_2}(v_1,v_2)$ при изменении значений $-\infty<v_i<\infty,\ i=1,2,$ лежат внутри угла раствора меньшего π, в плоскости комплексной переменной ω. Тогда найдется такое комплексной число γ, что значения функции $\gamma H^{+}_{u_1u_2}(v_1,v_2)$ при $-\infty<v_i<\infty,$ $i=1,2,$ лежат внутри окружности с центром в точке (1,0) и с радиусом, равным единице в плоскости комплексной переменной ω. По аналогии с [10] назовем это условие условием *A*. Решение уравнения (19) будем искать итерационным методом:

$$x_{n+1}(t_1,t_2)=x_n(t_1,t_2)-$$

$$-\gamma\left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}h(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)x_n(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2-f(t_1,t_2)\right),n=0,1,... \quad (20)$$

В случае, если значения функции $H^{+}_{u_1u_2}(v_1,v_2)$ при изменении значений $-\infty<v_i<\infty,\ i=1,2,$ лежат внутри угла раствора меньшего π и в вершине угла, решение уравнения (19) ищется итерационным методом

$$x_{n+1}(t_1,t_2)=\alpha_n x_n(t_1,t_2)+(1-\alpha_n)(x_n(t_1,t_2)-$$

$$-\gamma\left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}h(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)x_n(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2-f(t_1,t_2))\right),n=0,1,..., \quad (21)$$

где $0<\alpha_*\le\alpha_n\le\alpha^*<1.$

Докажем сходимость итерационных методов (20) и (21).

Норму функции $F(p_1,p_2)$ определим формулой

$$\|F(p_1,p_2)\|^2=\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(u_1+iv_1,u_2+iv_2)|^2\,dv_1dv_2\right]. \quad (22)$$

Для обоснования сходимости итерационных процессов в (20) и (21) нам понадобится формула, аналогичная формуле Парсеваля для преобразования Фурье.

Очевидно,

$$\|F(p_1,p_2)\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(u_1+iv_1,u_2+iv_2)|^2\,dv_1dv_2=$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(t_1,t_2)e^{-(u_1+iv_1)t_1}e^{-(u_2+iv_2)t_2}dt_1dt_2\right|^2 dv_1dv_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-u_1t_1-u_2t_2} f(t_1,t_2)e^{-i(v_1t_1+v_2t_2)}dt_1dt_2\right|^2 dv_1dv_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-u_1t_1-u_2t_2} f(t_1,t_2)\right)_{++} e^{-i(v_1t_1+v_2t_2)}dt_1dt_2\right|^2 dv_1dv_2 =$$

$$= 4\pi^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|V((e^{-u_1t_1-u_2t_2} f(t_1,t_2))_{++}\right|^2 dv_1dv_2 =$$

$$= 4\pi^2 \| V(e^{-u_1t_1-u_2t_2} f(t_1,t_2))_{++})\|^2 = 4\pi^2 \| (e^{-u_1t_1-u_2t_2} f(t_1,t_2))_{++}\|^2 =$$

$$= 4\pi^2\left[\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left|e^{-u_1t_1-u_2t_2} f(t_1,t_2)\right|^2 dt_1dt_2\right]^{1/2}.$$

Здесь

$$\left(e^{-u_1t_1-u_2t_2} f(t_1,t_2)\right)_{++} = \begin{cases} e^{-u_1t_1-u_2t_2} f(t_1,t_2), (0\le t_1<\infty)\cap(0\le t_2<\infty), \\ 0, t_1,t_2. \end{cases}$$

Докажем сходимость итерационного процесса (20). Умножим уравнение (20) на $e^{-u_1t_1-u_2t_2}$. В результате имеем

$$e^{-u_1t_1-u_2t_2}x_{n+1}(t_1,t_2) = e^{-u_1t_1-u_2t_2}(x_n(t_1,t_2) -$$
$$-\gamma\left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)x_n(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2 - f(t_1,t_2))\right), n=0,1,\ldots \qquad (23)$$

Вычитая почленно из (22) такое же выражение, но со значением индекса на единицу меньшим, и переходя к нормам, получаем

$$\| e^{-u_1t_1-u_2t_2}(x_{n+1}(t_1,t_2)-x_n(t_1,t_2))\| = \Big\| e^{-u_1t_1-u_2t_2}(x_n(t_1,t_2)-x_{n-1}(t_1,t_2)) -$$
$$-\gamma\left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)(x_n(\tau_1,\tau_2)-x_{n-1}(\tau_1,\tau_2))d\tau_1d\tau_2\right)\Big\| =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\Big\| L[x_n(t_1,t_2)-x_{n-1}(t_1,t_2) -$$

$$-\gamma\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)(x_n(\tau_1,\tau_2)-x_{n-1}(\tau_1,\tau_2))d\tau_1 d\tau_2 \Bigg]\Bigg\| =$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left\|X_n(p_1,p_2)-X_{n-1}(p_1,p_2)-\gamma H(p_1,p_2)(X_n(p_1,p_2)-X_{n-1}(p_1,p_2))\right\|\le$$

$$\le \sup_{-\infty<v_i<\infty, i=1,2} |1-H(u_1+iv_1,u_2+iv_2)|\frac{1}{4\pi}\| X_n(p_1,p_2)-X_{n-1}(p_1,p_2)\|=$$

$$=\sup_{-\infty<v_i<\infty,\ i=1,2} |1-H(u_1+iv_1,u_2+iv_2)|\left\|e^{-u_1t_1-u_2t_2}(x_n(t_1,t_2)-x_{n-1}(t_1,t_2))\right\|. \quad (24)$$

При условии

$$\sup_{-\infty<v_i<\infty, j=1,2} |1-H(u_1+iv_1,u_2+iv_2)|\le q<1 \quad (25)$$

сходимость итерационного метода (20) следует из теоремы Банаха [11].

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть выполнено условие (24). Тогда уравнение (19) имеет единственное решение, к которому сходится итерационный процесс (20) со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q.

В случае, если вместо условия (24) выполняется условие

$$\sup_{-\infty<v_i<\infty,\ j=1,\ 2} |1-\gamma H(u_1+iv_1,u_2+iv_2)|\le 1, \quad (26)$$

то справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2. Пусть выполнены следующие условия:

1) уравнение (19) разрешимо;

2) существует такое комплексное число γ, что справедливо неравенство (25).

Тогда итерационный процесс (21) сходится к одному из решений уравнения (19).

Доказательство следует из результатов [12] о сходимости итерационных процессов с унитарными операторами и неравенства

$$\| x(t_1,t_2)-\gamma\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \|\le\| x(t_1,t_2)\|,$$

справедливость которого доказывается рассуждениями, аналогичными приведенными в (23).

Построим итерационные схемы решения уравнения (19) в предположении, что для функции $H(u_1+iv_1,u_2+iv_2)$, $u_i=\text{const}$, $i_i\ge c$, $i=1,2,$ при изменении $(v_1,v_2)\in(-\infty,\infty)^2$ условие A не выполняется. Вначале рассмотрим случай, когда функция $H(u_1+iv_1,u_2+iv_2)$ не обращается в нуль во внутренних точках области $(-\infty,\infty)^2$. Обозначим через B достаточно большое положительное число, величина которого будет определенно ниже. При выполнении приведенных выше условий область $\Omega=[-B,B;-B,B]$ можно покрыть прямоугольниками $\Delta_{kl}=[t_k,t_{k+1};\tau_l,\tau_{l+1}]$, $t_k=-B+\dfrac{2kB}{M_1}$, $k=0,1,\dots,M_1$, $\tau_l=-B+\dfrac{2lB}{M_2}$, $l=0,1,\dots,M_2$, таким образом, чтобы при $(v_1,v_2)\in\Delta_{kl}$ значения функции $H(u_1+iv_1,u_2+iv_2)$ были расположены внутри угла раствора меньшего π с вершиной в начале координат плоскости комплексной переменной w.

В этом случае каждому прямоугольнику Δ_{kl} можно поставить в соответствие комплексное число γ_{kl} такое, что значения функции $(1-\gamma_{kl}H(u_1+iv_1,u_2+iv_2))$ при $(v_1,v_2)\in\Delta_{kl}$ лежат внутри окружности радиуса 1 с центром в точке (1,0) плоскости комплексной переменной w.

Обозначим через $E_{kl}(u_1+iv_1,u_2+iv_2)$ характеристическую функцию области Δ_{kl}, определяемую формулой

$$E_{kl}(u_1+iv_1,u_2+iv_2)=\begin{cases}1, & (\upsilon_1,\upsilon_2)\in\Delta_{kl},\\ 0, & (\upsilon_1,\upsilon_2)\in(-\infty,\infty)^2\setminus\Delta_{kl}.\end{cases}$$

Решение уравнение (19) будем искать итерационным методом:

$$x_{n+1}^{kl}(t_1,t_2)=\alpha_n^{kl}x_n(t_1,t_2)+(1-\alpha_n^{kl})(x_n^{kl}(t_1,t_2)-$$

$$-\gamma_{kl}\left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}h_{kl}(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2),x_n(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2-f_{kl}(t_1,t_2)\right),\qquad(27)$$

где $n=0,1,\dots$, $k=0,1,\dots,M_1-1$, $l=0,1,\dots,M_2-1$,

$$x_{n+1}(t_1,t_2)=\sum_{k=0}^{M_1-1}\sum_{l=0}^{M_2-1}x_{n+1}^{kl}(t_1,t_2),\qquad(28)$$

здесь $h_{kl}(t_1,t_2)$ – прообраз функции $H(u_1+iv_1,u_2+iv_2)E_{kl}(u_1+iv_1,u_2+iv_2)$, $f_{kl}(t_1,t_2)$ – прообраз функции $F(u_1+iv_1,u_2+iv_2)E_{kl}(u_1+iv_1,u_2+iv_2)$.

Будем считать, что уравнение (19) имеет единственное решение $x^*(t_1,t_2)$, удовлетворяющее условию

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left|e^{-u_1t_1-u_2t_2}x^*(t_1,t_2)\right|^2dt_1dt_2\le k<\infty.$$

Тогда найдется постоянное число B такое, что справедливо неравенство

$$\int\limits_{(-\infty,\infty)^2 \setminus [-B,B]^2} \int \left| e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2} x^*(t_1, t_2) \right|^2 dt_1 dt_2 < \varepsilon.$$

При сделанных выше предположениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.3. Пусть уравнение (19) имеет единственное решение. Тогда итерационный процесс (26), (27) сходится к этому решению при $n \to \infty$, $B \to \infty$ и при соответствующем выборе констант γ_{kl}, $k = 0, 1, \ldots, M_1$, $l = 0, 1, \ldots, M_2$ (отметим, что при увеличении значения B параметры M_1, M_2 могут также возрастать).

Рассмотрим теперь случай, когда функция $H(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2)$ $(u_1, u_2 = \text{const}, u_1, u_2 \geq c)$ может обращаться в нуль на конечном числе линий. В этом случае область $[-B, B; -B, B]$, где B – достаточно большое положительное число, может быть покрыта прямоугольниками $\Delta_{kl}, k = 0, 1, \ldots, M_1 - 1, l = 0, 1, \ldots, M_2 - 1$, такими, что при $(v_1, v_2) \in \Delta_{kl}$ значения функции $H(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2)$ лежат внутри угла (и, возможно, в его вершине) раствора меньшего π.

Тогда каждому прямоугольнику Δ_{kl}, $k = 0, 1, \ldots, M_1 - 1, l = 0, 1, \ldots,$ $M_2 - 1$, можно поставить в соответствие такое комплексное число γ_{kl}, что значения функции $1 - \gamma_{kl} H(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2), (v_1, v_2) \in \Delta_{kl}$, будут лежать в круге радиуса 1 с центром в точке (1,0). При этих значениях γ_{kl} итерационный процесс (27), (28) сходится к одному из решений уравнения (19).

Замечание 1. Утверждения, аналогичные сформулированным в теоремах 2.1–2.3, справедливы и для уравнений второго рода.

Замечание 2. Для уравнений Вольтерра первого и второго родов можно по аналогии с итерационными схемами (20), (21) построить итерационные процессы в частотной области.

Список литературы

1. **Верлань, А. Ф.** Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – Киев : Наукова думка, 1986. – 544 с.
2. Интегральные уравнения. – М. : Наука, 1968. – 448 с. – (Справочная математическая библиотека).
3. **Сизиков, В. С.** Математические методы обработки результатов измерений / В. С. Сизиков. – СПб. : Политехника, 2001. – 240 с.
4. **Трикоми, Ф.** Интегральные уравнения / Ф. Трикоми. – М. : ИЛ, 1960. – 300 с.
5. **Цалюк, З. Б.** Интегральные уравнения Вольтерра / З. Б. Цалюк // Итоги науки и техники. – М. : Наука, 1979. – Т. 17. – С. 131–198. – (Математический анализ).
6. **Baker, C. T. H.** A perspective on the numerical treatment of Volterra equations / C. T. H. Baker // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2000. – V. 125. – P. 217–249.
7. **Brunner, H.** On the History of Numerical Methods for Volterra Integral Equations / H. Brunner // CWI Newsletter. – 1986. – № 11. – 20 p.
8. **Brunner, H.** The numerical solution of Volterra equations : CWI Monographs / H. Brunner, P. J. van der Houwer. – 3 North. – Holland, Amsterdam, 1986. – 320 p.

9. **Бойков, И. В.** Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2004. – 316 с.
10. **Бойков, И. В.** Итерационные методы решения уравнений в свертках / И. В. Бойков // Известия вузов. Математика. – 1998. – № 2. – С. 8–15.
11. **Люстерник, Л. А.** Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 540 с.
12. **Обломская, Л. Я.** О методах последовательных приближений для линейных уравнений в банаховых пространствах / Л. Я. Обломская // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1968. – Т. 8. – № 2. – С. 417–426.
13. **Тихонов, А. Н.** Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1974. – 224 с.

Бойков Илья Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет

Boykov Ilya Vladimirovich
Doctor of physico-mathematical sciences, professor, head of sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University

Кучумов Евгений Владимирович
аспирант, Пензенский государственный университет

Kuchumov Evgeny Vladimirovich
Postgraduate student, Penza State University

УДК 517.968.2; 519.62/.64

Бойков, И. В.

Об одном итерационном методе решения интегральных уравнений Вольтерра / И. В. Бойков, Е. В. Кучумов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 2 (10). – С. 25–38.